از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم!

خشایار کاویانپور
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی
دانشگاه تربیت مدرس

اشاره

«قضیهٔ پیک» که در کتاب جدید هندسهٔ۱ (پایهٔ دهم) برای نخستین‌بار مطرح شده است، در محاسبهٔ مساحت شکل‌های مختلف هندسی و به‌خصوص شکل‌های نامنظم کاربردهای زیادی دارد که در کتاب درسی نیز نمونه‌هایی از آن آمده است. اما باید بدانید که کاربردهای قضیهٔ پیک به این‌ها محدود نمی‌شود و نمونه‌هایی که در این مقاله به آن‌ها اشاره شده، بیانگر کاربردهایی غیرمعمول از این قضیه است.

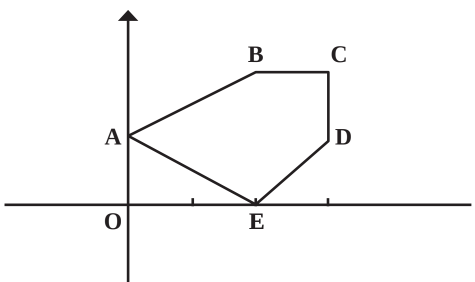
پیش از ورود به بحث، نکات زیر را یادآوری می‌کنیم:

۱. هر چندضلعی شبکه‌ای را می‌توان درون یک دستگاه مختصات قرار داد که مختصات رئوس آن‌ها اعدادی صحیح است.

۲. مربع طول هر ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای را باید بتوان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

مثلاً در شکل ۱، اگر O مبدأ مختصات باشد، با توجه به $A(0,y_1)$ و $E(x_2,0)$ که در آن‌ها y_1 و x_2 عددهای صحیح‌اند، داریم:

$$AE^2 = (y_E - y_A)^2 + (x_E - x_A)^2 = \underbrace{y_1^2 + x_2^2}_{\text{مجموع مربع‌های دو عدد صحیح}}$$



شکل ۱.

برای مثال، $\sqrt{۷}$ نمی‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا ۷ را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت. اما $\sqrt{۱۸}$ می‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا: $۳^۲+۳^۲=۱۸$.

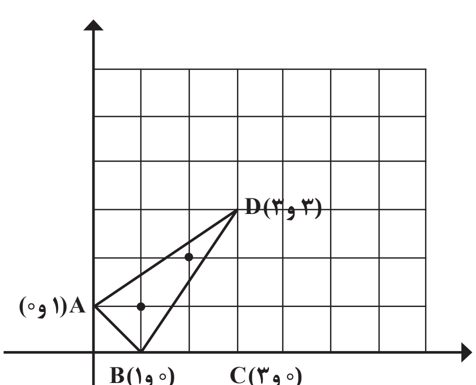
حال به مثال‌هایی از کاربردهای قضیهٔ پیک توجه کنید:

مثال ۱. درون مثلثی به اضلاع $\sqrt{۱۳}$، $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۲}$ که مختصات رئوسش عددهای صحیح است، چند نقطه با مختصات صحیح می‌توان پیدا کرد؟

حل:

$$(\sqrt{۱۳})^۲ = ۱۳ = ۳^۲ + ۲^۲$$

$$(\sqrt{۲})^۲ = ۲ = ۱^۲ + ۱^۲$$



شکل ۲.

از مبدأ مختصات، یک واحد به سمت بالا می‌رویم تا به A برسیم و یک واحد به سمت راست می‌رویم تا به B برسیم. $AB=\sqrt{۲}$ حال از B دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم و از C، سه واحد به سمت بالا می‌رویم تا به D برسیم. $AD=\sqrt{۱۳}$ اگر از D به A وصل کنیم، مثلث ساخته می‌شود. با توجه به شکل، تنها دو نقطه با مختصات صحیح درون این مثلث می‌توان یافت (۲ نقطهٔ درونی دارد).

■ **مثال ۲.** چند نوع مستطیل شبکه‌ای با مساحت ۶ می‌توان یافت؟

■ **حل:** طول و عرض مستطیل‌ها باید اعداد صحیح باشند، یا اگر رادیکالی هستند، مربع آن‌ها باید به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح باشند:

$$۶=\underbrace{۱\times۶}_{(۱)}=\underbrace{۲\times۳}_{(۲)}=\underbrace{\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}}_{(۳)}=\underbrace{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}_{(۴)}=\underbrace{\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}}_{(۵)}$$

موارد (۱) و (۲) قابل قبول‌اند. حال موارد (۳)، (۴) و (۵) را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}\rightarrow(۳\sqrt{۲})^{۲}=۱۸=۳^{۲}+۳^{۲}$$
$$\downarrow$$

قابل قبول است: $(\sqrt{۲})^{۲}=۲=۱^{۲}+۱^{۲}$

$۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}$ غیرقابل قبول‌اند، زیرا مربع دو عدد را جداگانه نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین شش نوع مستطیل شبکه‌ای می‌توان یافت که مساحت آن‌ها ۶ است:

$\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}$ یا $۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$ و ۲×۳ یا ۳×۲ و ۱×۶ یا ۶×۱

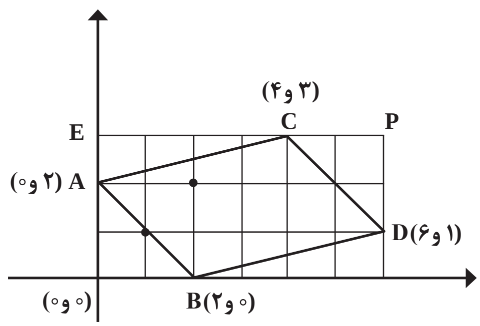
■ **مثال ۳.** در چهارضلعی ABCD با رئوسی به مختصات صحیح، طول اضلاع به‌ترتیب $BA=۲\sqrt{۲}$، $AC=\sqrt{۱۷}$، $CD=۲\sqrt{۲}$ و $DB=\sqrt{۱۷}$ است. روی بزرگ‌ترین قطر این چهارضلعی چند نقطهٔ دیگر (به جز D و B) با مختصات صحیح قرار می‌گیرد؟

■ **حل:** چون مختصات رئوس صحیح است، چهارضلعی شبکه‌ای است. پس می‌توان چهارضلعی مفروض را در یک دستگاه مختصات قرار داد. چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.

مربع طول دو ضلع نیز باید مجموع مربعات دو عدد صحیح باشد:

$(\sqrt{۱۷})^{۲}=۴^{۲}+۱^{۲}$ و $(۲\sqrt{۲})^{۲}=۲^{۲}+۲^{۲}$

از مبدأ مختصات دو واحد به بالا و دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به A و B برسیم: $AB=۲\sqrt{۲}$. از A یک واحد به بالا و از E چهار واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم: $AC=\sqrt{۱۷}$. از C، دو واحد به راست می‌رویم تا به P و از P دو واحد به پایین می‌رویم تا به D برسیم: $CD=۲\sqrt{۲}$.



شکل ۳.

و در نهایت از D به B وصل می‌کنیم. $BD=\sqrt{۱۷}$ خواهد بود. در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABDC به‌دست می‌آید.

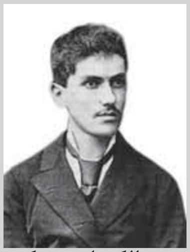
بزرگ‌ترین قطر، AD است. (چرا؟) با توجه به مختصات رئوس، معادلهٔ خط AD را می‌نویسیم.

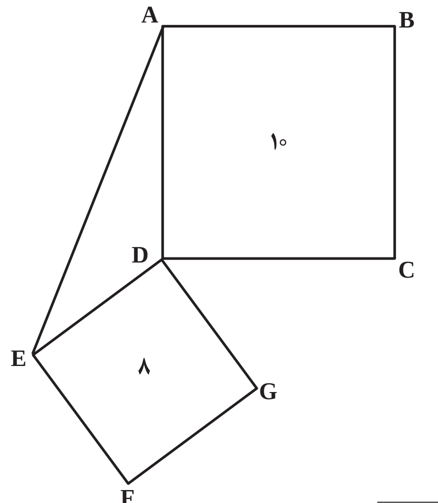
$$AD:y-۲=\frac{۲-۱}{۰-۶}(x-۰)\Rightarrow y-۲=-\frac{۱}{۶}x$$
$$\Rightarrow x+۶y=۱۲$$

به‌طوری‌که: $۶\leq x\leq ۰$ و $۲\leq y\leq ۱$ (چرا؟) چون y صحیح دیگری نداریم، پس AD نقطهٔ درونی ندارد.

■ **تمرین ۱.** قطر کوچک چند نقطه با مختصات صحیح دربردارد؟

■ **مثال ۴.** در شکل ۴، ABCD مربعی به مساحت ۱۰ و DGFE مربع به مساحت ۸ است. اگر مختصات رئوس این دو مربع اعداد صحیح باشند، مساحت مثلث ADE چقدر است؟


جرج الکساندر پیک



شکل ۴.

■ **حـل:** چون مختصات رأس‌های مربع‌ها اعداد صحیح هستند، بنابراین شبکه‌ای هستند.
حال دقت کنید به مراحل حل سؤال:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD}=۱۰ \Rightarrow \text{ضلع مربع}=\sqrt{۱۰} \\ ۱۰=۳^۲+۱^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

درون یک مربع ۴×۴ مربعی رسم می‌کنیم که اضلاع مربع ۴×۴ را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کند.

$$\left.\begin{array}{l} S_{DGFE}=۸ \Rightarrow \text{ضلع مربع}=\sqrt{۸} \\ ۸=۲^۲+۲^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

درون یک مربع ۴×۴ مربعی رسم می‌کنیم که اضلاع مربع ۴×۴ را به نسبت مساوی ۲ به ۲ تقسیم کند

پرسش‌های بیکارجو!

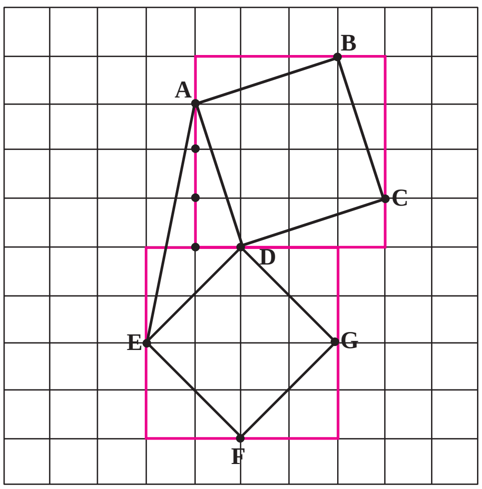
اگر x+y=۲ باشد، حاصل کسر $\frac{x^۳+۲xy^۲+۳y^۳}{x^۲+y^۲}$ در کدام فاصلهٔ زیر قرار می‌گیرد؟

☐ الف) $(-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$
☐ ب) $(-۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})$
☐ ج) $(-۲-\sqrt{۵},-۲+\sqrt{۵})$
☐ د) $[-۴-\sqrt{۵},-۴+\sqrt{۵}]$
☐ هـ) $[-۸-\sqrt{۵},-۸+\sqrt{۵}]$

البته توجه کنید دو مربع ۴×۴ در یک رأس مشترک‌اند. حال از A به E وصل می‌کنیم.
مثلث ADE، ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطهٔ درونی دارد، لذا مساحت مثلث از دستور پیک به‌دست می‌آید.

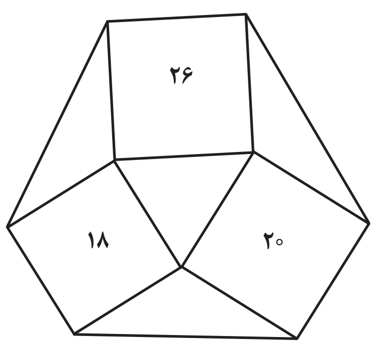
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۴}{۲}+۳-۱$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADE}}=۴$$



شکل ۵.

■ **تمرین ۲.** در شکل ۶ مختصات تمامی رئوس اعداد صحیح است مساحت بزرگ‌ترین ۶ ضلعی چقدر است؟



شکل ۶.

■ **جواب:** ۱۰۰

■ **تمرین ۳.** در یک شبکهٔ ۸×۸ چند مستطیل شبکه‌ای به مساحت ۱۲ می‌توان رسم کرد؟
(مسابقات IMC، ۲۰۱۰ با تغییر)

*منبع

«Amusements in Mathematics», First edition, 1917.